

УДК 519.213

EDN: MXHDMW

## АНАЛИЗ ФРАКТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОПОЛОГИЙ МИКРОСТРУКТУР СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

**В.Б. Куликов**ORCID: 0000-0003-2825-7476 e-mail: [vb.kulikov@yandex.ru](mailto:vb.kulikov@yandex.ru)Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
*Нижний Новгород, Россия***А.Б. Куликов**ORCID: 0009-0008-4659-7793 e-mail: [akulikov@nntu.ru](mailto:akulikov@nntu.ru)Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
*Нижний Новгород, Россия***В.П. Хранилов**ORCID: 0000-0003-1317-5320 e-mail: [hranilov@nntu.ru](mailto:hranilov@nntu.ru)Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
*Нижний Новгород, Россия*

Предложено решение задачи идентификации одно- и двумерных законов распределения характеристик стохастических структур с фрактальными свойствами. Показано, что если задана матрица данных (измеренные двумерные выборки) топологических параметров структур, то стохастический анализ может опираться на идентифицированную систему одномерных условных плотностей распределения и конструктивно определять систему двух случайных величин. При этом фрактальная геометрия мембранных топологий эффективно исследуется на основе предложенного двумерного R/S-анализа. На основе методов стохастического и фрактального анализа впервые выявлена анизотропия топологических характеристик гибридных газоселективных мембран, что позволило ввести и обосновать математический формализм и представление о двумерной фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича с двумя «ортогональными» компонентами.

**Ключевые слова:** идентификация, фрактальная геометрия и фрактальный анализ, двумерная плотность распределения и двумерный R/S-анализ стохастических данных, размерность Хаусдорфа-Безиковича.

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Куликов, В.Б. Анализ фрактальных параметров поверхностных топологий микро-структур со стохастическими свойствами / В.Б. Куликов, А.Б. Куликов, В.П. Хранилов // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 4. С. 17-26. EDN: MXHDMW

## ANALYSIS OF FRACTAL PARAMETERS OF SURFACE TOPOLOGIES OF MICROSTRUCTURES WITH STOCHASTIC PROPERTIES

**V.B. Kulikov**ORCID: 0000-0003-2825-7476 e-mail: [vb.kulikov@yandex.ru](mailto:vb.kulikov@yandex.ru)Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev  
*Nizhny Novgorod, Russia***A.B. Kulikov**ORCID: 0009-0008-4659-7793 e-mail: [akulikov@nntu.ru](mailto:akulikov@nntu.ru)Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev  
*Nizhny Novgorod, Russia*

**V.P. Khranilov**

ORCID: **0000-0003-1317-5320** e-mail: **hranilov@nntu.ru**

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev  
*Nizhny Novgorod, Russia*

**Abstract.** The paper proposed a solution to the problem of identifying one- and two-dimensional distribution laws of characteristics of stochastic structures with fractal properties. If a data matrix (measured two-dimensional samples) of topological parameters of structures is specified, then stochastic analysis can rely on the identified system of one-dimensional conditional density function and constructively determine a system of two random variables. In this case, the fractal geometry of membrane topologies is effectively studied based on the proposed two-dimensional R/S analysis. The anisotropy of topological characteristics of hybrid gas-selective membranes was revealed for the first time based on stochastic and fractal analysis methods. This made it possible to introduce and substantiate the mathematical formalism and the concept of a two-dimensional Hausdorff-Besicovitch fractal dimension with two «orthogonal» components.

**Key words:** identification, fractal geometry and fractal analysis, two-dimensional density function and two-dimensional R/S analysis of stochastic data, Hausdorff-Besicovitch dimension.

**FOR CITATION:** V.B. Kulikov, A.B. Kulikov, V.P. Khranilov. Analysis of fractal parameters of surface topologies of microstructures with stochastic properties. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 4. Pp. 17-26. EDN: MXHDMW

### **Введение**

Стохастический анализ в сочетании с фрактальной геометрией и фрактальным анализом двумерных стохастических данных востребованы в сложных техно- и биосферах современной науки: материаловедении, системах космического наблюдения, микробиологии бактериальных сообществ, атомной и термоядерной энергетике. Структура и динамика этих систем характеризуется полимодальностью законов распределения параметров и закономерностей. Зачастую изучаемая топология двумерных структур фрактальна (мультифрактальна). Методы идентификации шероховатости поверхностей и фрактальных характеристик изложены, в частности, в [1-4]. Для широкого класса задач идентификации одномерных законов распределения случайных величин разработаны эффективные методы [5]. При восстановлении сложных полимодальных законов в [6] рассмотрены новые способы идентификации плотностей распределения на основе регуляризации. Верификация методов выполнена для технических приложений и биомедицины, включая перинатальную диагностику для получения устойчивых решений [7].

В предлагаемой статье излагаются результаты исследования мембранных структур наноразмерного формата: выполнена идентификация, 3D-визуализация и впервые предложенный двумерный R/S-анализ по Херсту. Показано, что для анализа двумерных стохастических пористых структур и интерпретации их свойств необходимо непараметрическое восстановление условных законов распределения системы двух случайных величин, заданных на фрактальной поверхности и двумерный R/S-анализ (обобщение одномерного варианта по Херсту). Двумерный глубинный профиль мембраны измерялся методом атомно-силовой микроскопии (АСМ), после чего для него были идентифицированы одно- и двумерные полимодальные плотности распределения. Две выборки (по 256 элементов) анизотропных параметров Херста впервые в практике исследования и R/S-анализа доопределены идентифицированными плотностями распределения.

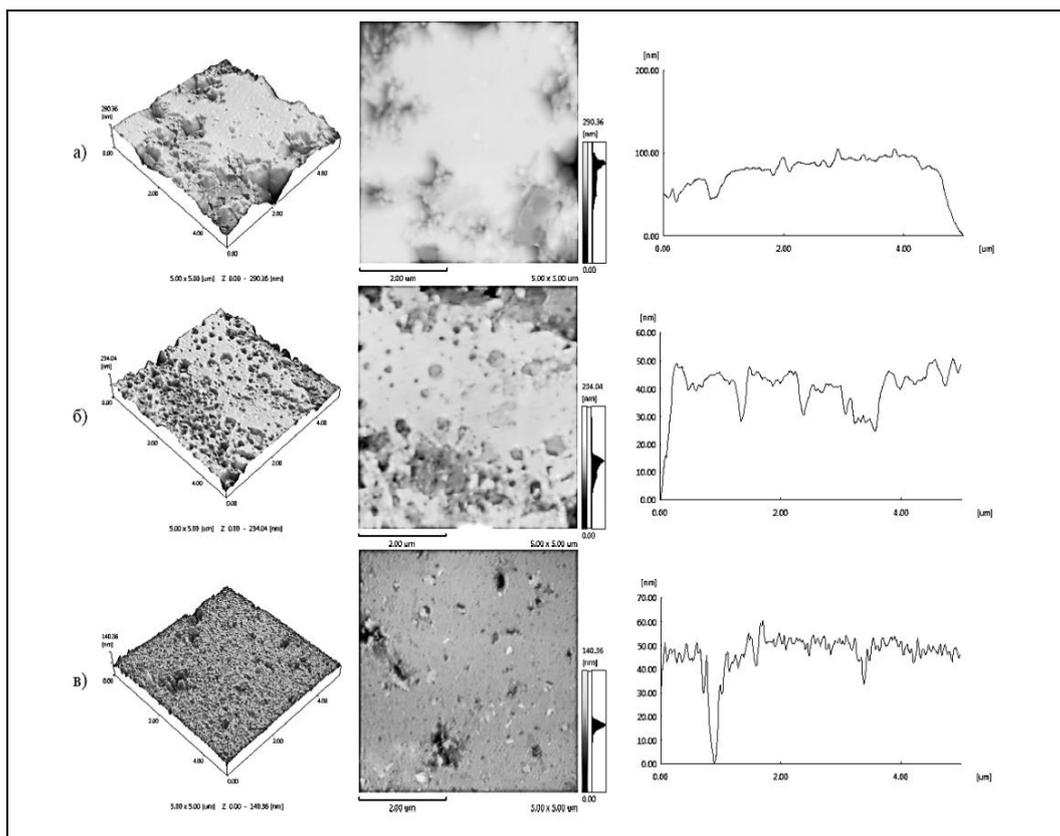
### **Идентификация и визуализация плотностей распределения двумерных стохастических мембранных структур**

Представим краткий обзор технологического аспекта задачи стохастического анализа характеристик мембранных структур. Востребованными наукоемкими технологиями становятся в настоящее время мембранные технологии газоразделения, имеющие важное значение

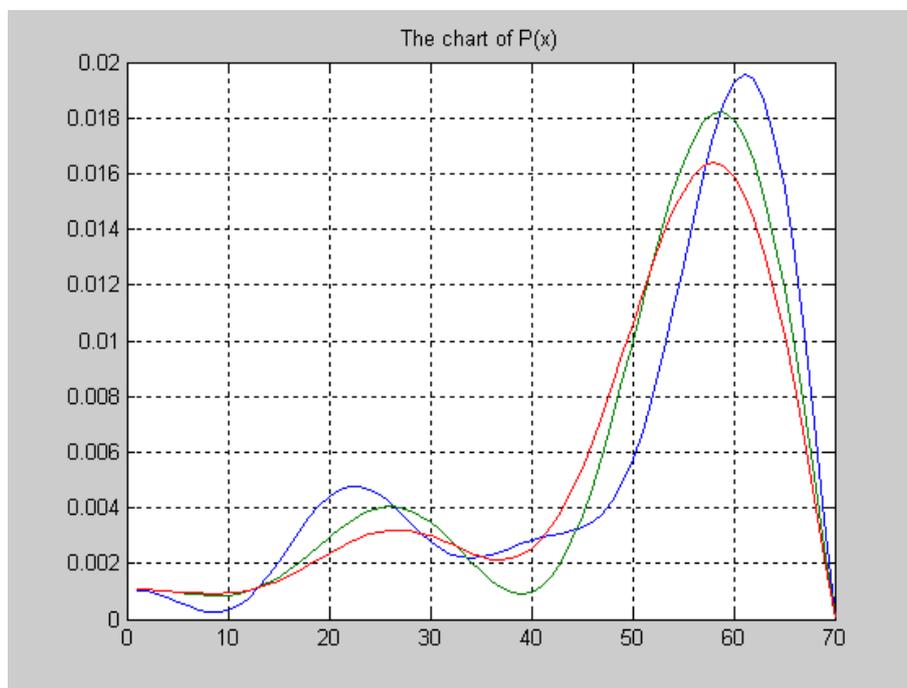
для химической, атомной и многих других отраслей промышленности [8, 9]. При этом новые полимерные мембраны характеризуются высокими значениями механической прочности, избирательности и стойкости к воздействию агрессивных сред. В [10] с этих позиций отмечается перспективность органо-неорганических полимеров блочной структуры. В публикации [11] указывается, что «в этом направлении особую роль играют нано-пористые полимеры, получаемые на основе 2,4-толуиленидиизоцианата и макро-инициаторов – калий-замещенных блок-сополимеров оксидов пропилена и этилена». Для оптимизации концентрации нано-дисперсной фазы в органо-неорганической полимерной мембране и синтеза структур с заранее заданными свойствами по широкому спектру технологических параметров, необходим глубокий анализ исходных материалов мембран, в том числе, контроль стохастических вариаций давления, вязкости, молекулярного веса разделяемых газов. Очень важен также мониторинг процессов загрязнения, деградации топологии и других параметров структур. При исследовании микромембран главенствующую роль играют АСМ-методы, определяющие стохастическую оценку распределения пор (размеры, глубина) на основе измеренных данных [12]. АСМ является «неинвазивной» процедурой, что позволяет изучать мембранные поверхности без предварительной физико-химической обработки. Кроме того, в процессе измерений можно задать бесконтактный режим сканирования топологии микромеханического зонда – кантилевера. В качестве недостатка АСМ можно отметить относительно высокую длительность измерений и требование к исключению вибрационных воздействий на установку.

Настоящая работа является развитием методов исследования, изложенных в [12]. В ходе экспериментов с использованием сканирующего зондового микроскопа были исследованы распределения пор и глубинных профилей полимерных микромембран с различным содержанием полиэдральных октаглицидил-силсесквиоксанов (GI-POSS). Устройство атомно-силовой микроскопии выдает для обработки матрицу данных глубинных профилей структуры размером  $256 \times 256$  пикселей. Таким образом, изучаемые структуры описываются двумерными выборками, по которым восстанавливается система одномерных плотностей распределения, образующая 3D-поверхность. Ниже будет показано, что дополнение стохастических методов исследования фрактальным анализом представляется перспективным направлением в изучении структур и процессов с самоподобными и хаотическими свойствами.

На рис. 1А приведен снимок топологии и графики распределения глубин пор мембран на центральной линии структур. Мембраны имеют размеры 5 на 5 мкм. Измеренные параметры зависят от температуры разделяемых газов, молекулярного веса и давления, размера пор, фрактальной размерности, характеризующей топологические особенности строения микро-структуры. Глубинные профили мембран по измеренным выборкам идентифицируются разработанными методами как одномерные полимодальные распределения (рис. 1Б). Для идентификации распределений использован созданный авторами комплекс программ в системе MATLAB. Как видно, одномерные плотности распределения глубин пор – полимодальны с максимальным количеством высших мод до 4-5. Полимодальность отражает фрактальность характеристик мембран, что обуславливает сложные связи механических, диффузионных и других химических свойств изучаемых мембран [7]. Рис. 2А дополняет рис. 1 аналогичным изображением для значительных концентраций ПОСС (в 1 масс. %, 2 масс. % и 5 масс. %) и иллюстрирует 3D-график глубинного профиля периодической эталонной мембранной структуры с матрицей данных  $512 \times 512$  пикселей. Эта мембрана характеризуется бимодальными плотностями распределения глубинного профиля в сечениях вдоль оси X.



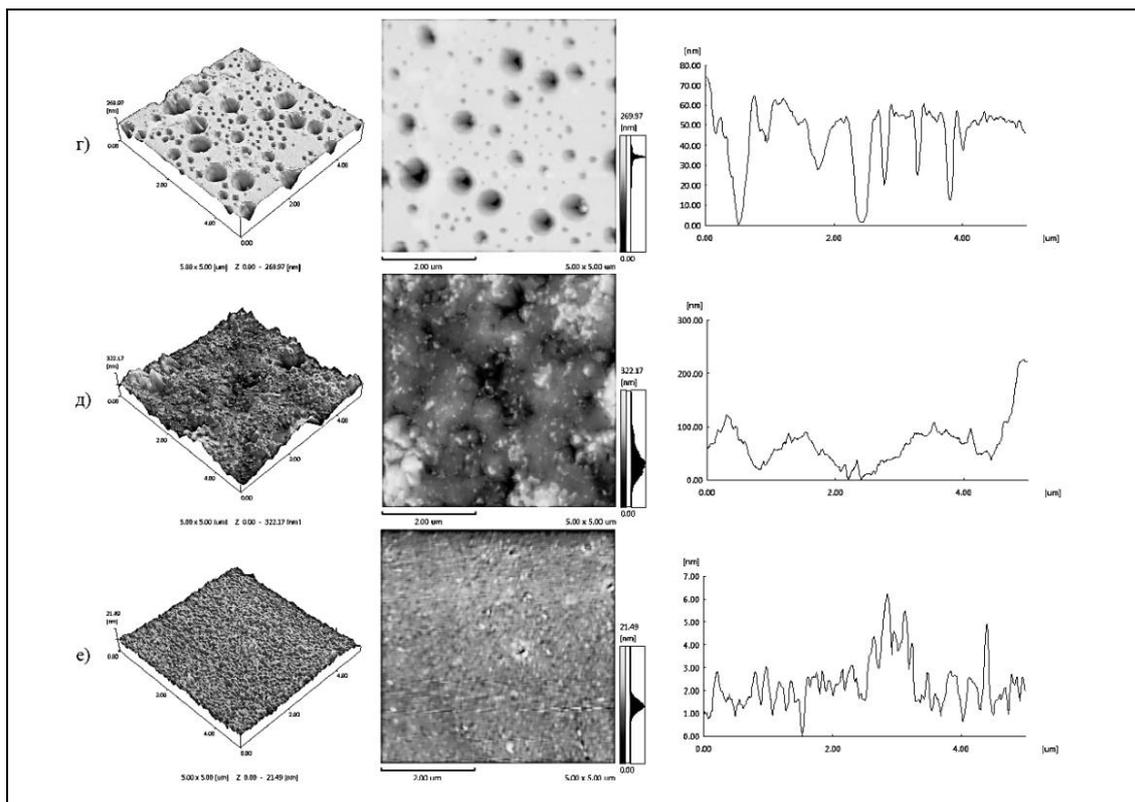
A)



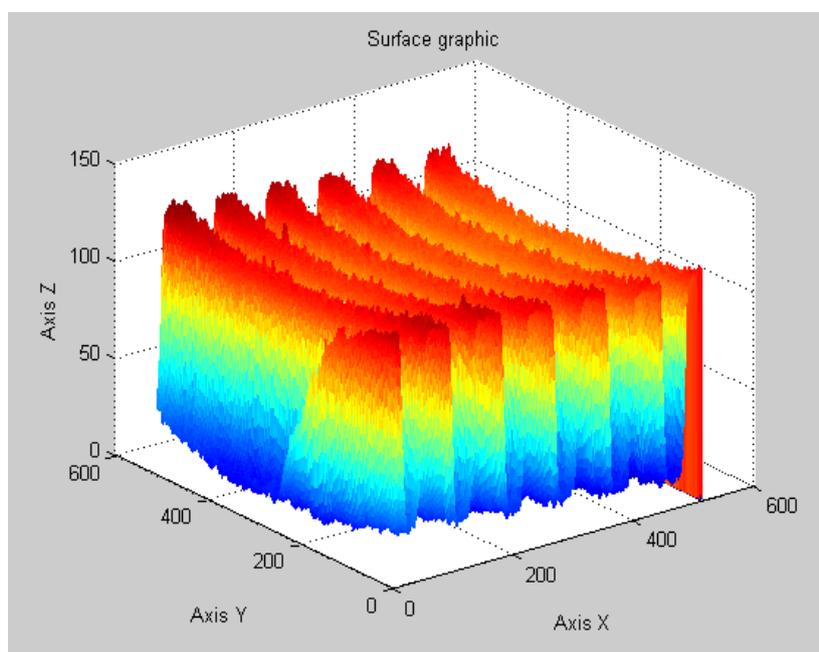
Б)

**Рис. 1. А) Снимки атомно-силовой микроскопии топологий [12] и графики глубинного профиля мембран для низких концентраций POSS (масс. %). Б) Законы распределения глубин пор для первых трех выбранных сечений мембраны**

**Fig. 1. A) Atomic-force microscopy images of membrane topologies [12] and depth profile graphs of membrane for low POSS concentrations (wt.%). Б) Pore depth distribution laws for the first three selected membrane sections**



А)



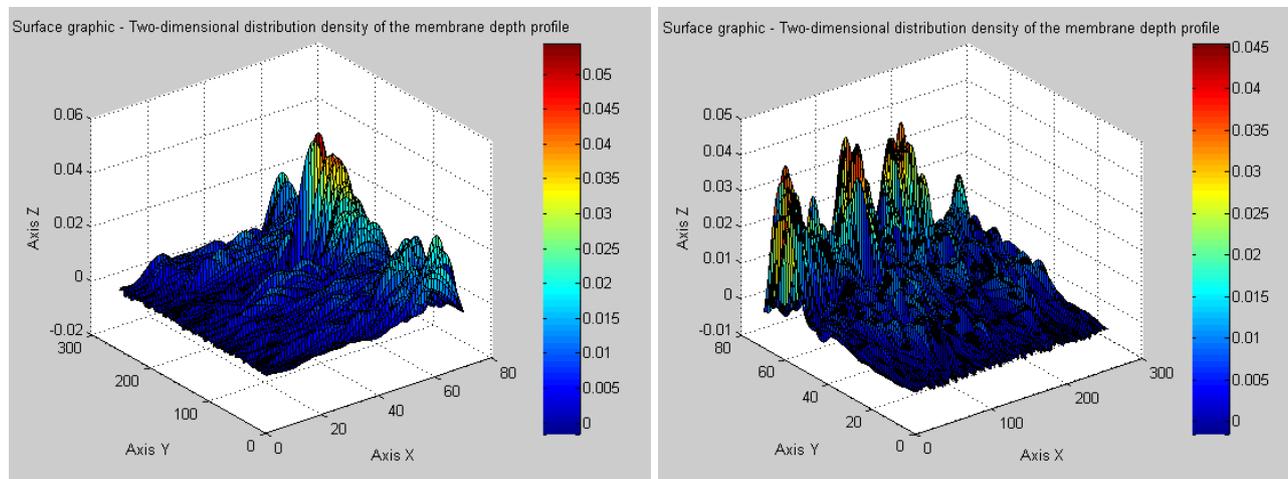
Б)

Рис. 2. А) Снимки атомно-силовой микроскопии топологий [12] и графики глубинного профиля мембран для значительных концентраций POSS (масс. %).

Б) Двумерное изображение периодической эталонной мембраны с матрицей данных 512×512 пикселей

Fig. 2. A) Atomic-force microscopy images of membrane topologies [12] and depth profile graphs of membrane for significant POSS concentrations (wt.%).  
 B) Two-dimensional image of a periodic reference membrane with a 512×512 pixel data matrix

На рис. 3А изображен массив одномерных плотностей распределения глубин пор мембраны по оси  $X$  при различных значениях по оси  $Y$ . Фактически это двумерная система одномерных плотностей распределения, при этом каждая функция плотности рассчитывается за несколько долей секунд в 70 координатах  $X$  при выбранном значении  $Y$ . На рис. 3Б показана аналогичная система плотностей по оси  $Y$  (по  $X$  – конкретная координата).



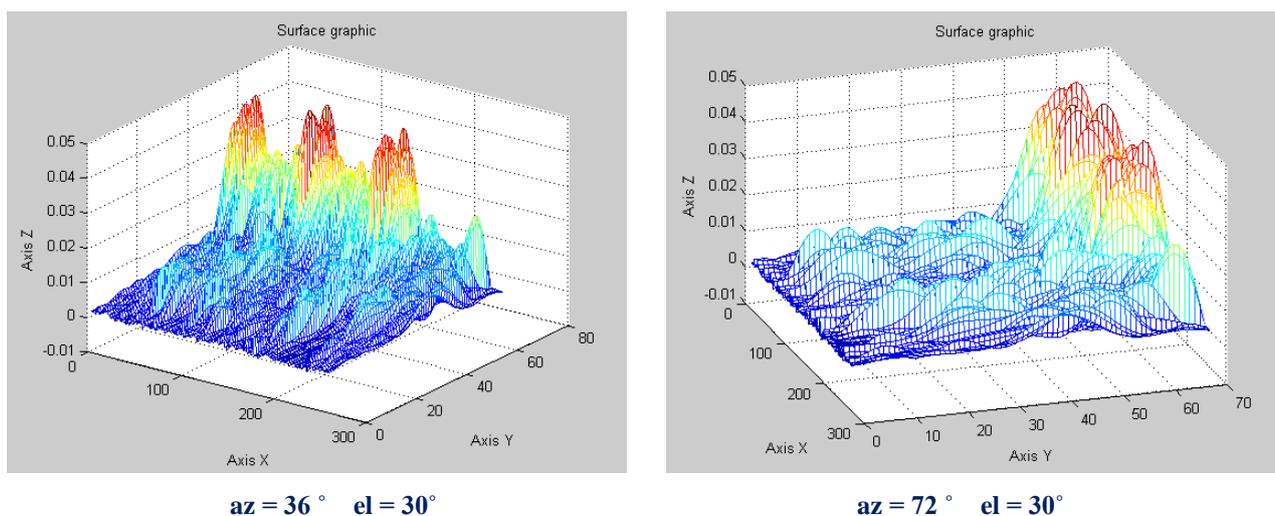
А)

Б)

**Рис. 3. Идентифицированные двумерные плотности распределения глубинного профиля мембраны вдоль осей  $X$  ( $Y$ )**

**Fig. 3. Identified two-dimensional density functions of the membrane depth profile along the  $X$  ( $Y$ ) axes**

Восстановление параметров двумерных стохастических зависимостей в конечном итоге требует высококачественной визуализации графических фигур. Так, 3D-график «двумерной» плотности распределения удобно рассматривать в полярной системе координат. Рис. 4 показывает  $p(X, Y)$  в режиме поворота, что повышает наглядность деталей в распределениях структуры, имеющих полимодальный характер, различный по направлениям  $X$  и  $Y$ .


 $az = 36^\circ \quad el = 30^\circ$ 
 $az = 72^\circ \quad el = 30^\circ$ 

**Рис. 4. Вращение двумерной плотности распределения для мембраны по оси  $Y$  ( $az$  и  $el$  -азимутальный и полярный углы в градусах)**

**Fig. 4. Rotation of the two-dimensional density function for the membrane along the  $Y$  axis ( $az$  and  $el$  are the azimuthal and polar angles in degrees)**

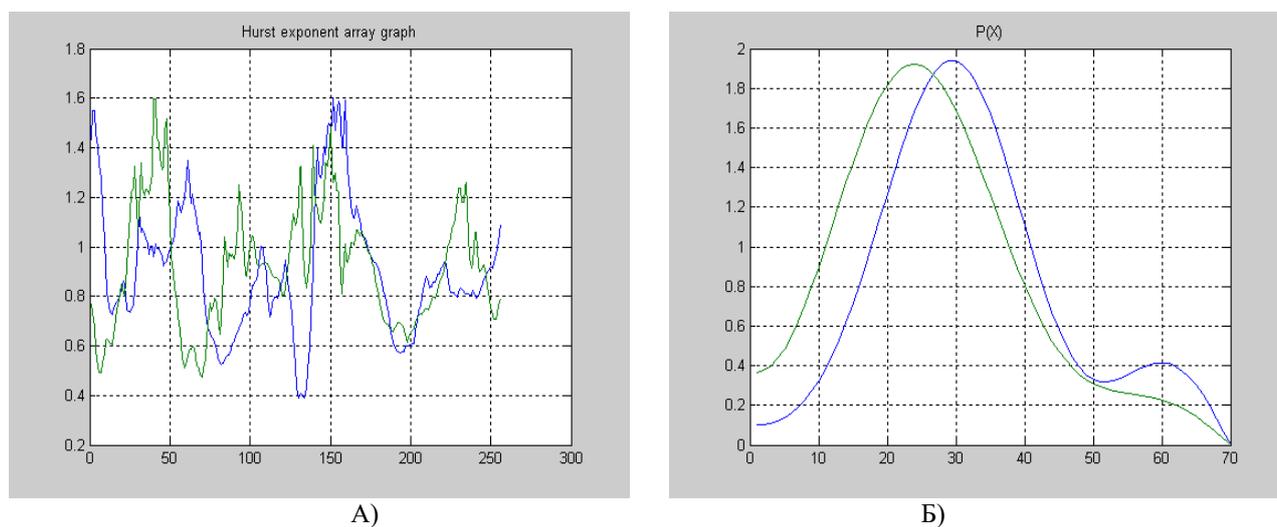
Таким образом, результаты восстановления двумерного распределения по ортогональным направлениям демонстрируют анизотропность функции плотности для глубин пор. Эта особенность подтверждается в рамках предложенного двумерного  $R/S$ -анализа. Двумерный стохастический анализ мембран является более эффективным инструментом исследования, позволяющим выявлять тонкую структуру топологий и влияние технологических факторов при изготовлении мембран.

Очевидно, что предложенный подход востребован при обработке конструкций авиационной и космической техники, в «тонком» экспериментальном анализе технологических и физических процессов в аппаратах, включая термоядерные установки типа ИТЭР, токамак Т-10, TEXTOR [4].

### Двумерный $R/S$ -анализ характеристик микроструктур

Полиmodalность законов распределения топологических характеристик мембран органично связана с фрактальным анализом, фрактальной геометрией и методологией исследования закономерностей явлений динамического хаоса [7]. В прикладном аспекте изучение фрактальных поверхностей или самоподобных процессов традиционно опирается на статистический метод, а именно –  $R/S$ -анализ [13-15]. Нормированный размах  $R/S$  связан с показателем Херста –  $H$  [13]. Семейство показателей Херста в 256 сечениях мембраны вдоль осей  $X$  и  $Y$  показано на рис. 5А. В статье [16] говорится, что «метод нормированного размаха Херста позволяет различить случайный и фрактальный временные ряды, а также давать оценку наличия или отсутствия долговременной памяти процесса. Исследуемый одномерный ряд обладает «кратковременной памятью» при  $H < 0.5$ , если  $H > 0.5$  – ряд соответствует фрактальному броуновскому движению (блужданию) с персистентными свойствами. Коэффициенты  $H$  в основном выше уровня 0.5 и ниже уровня 1 (фрактальность геометрии поверхности изучаемой мембраны). На некоторых одномерных плотностях показатели  $H$  превышают уровень 1».

Авторы полагают, что впервые выявленные «всплески» коэффициентов  $H$  для 2D-мембранной структуры аналогичны распределениям с «тяжелыми хвостами» (рис. 5Б).



**Рис. 5. А) Коэффициенты Херста  $H$  глубин пор мембраны вдоль осей  $X$  и  $Y$  (синий и зеленый цвета соответственно).**

**Б) Восстановленные одномерные плотности распределения для  $H$**

**Fig. 5. А) Hurst coefficients  $H$  of membrane pore depths along the  $X$  and  $Y$  axes (blue and green colors, respectively).**

**Б) Reconstructed one-dimensional density functions for  $H$**

Отмеченная особенность отражает сингулярность фрактально-вероятностных свойств конкретной мембранной топологии. Имеет место экстремальная (резко выраженная) глубинная разнородность профилей.  $R/S$ -анализ подтверждает фрактальность геометрии и анизотропии свойств пористых поверхностей мембранных структур. Для верификации полученных результатов приведем ниже выдержки из работы [4] ученых НИЦ «Курчатовский институт» по исследованию аморфных пленок на конструкциях из графита в термоядерных установках (ТУ).

«Особенностью условий высокотемпературной плазмы в ТУ является нетривиальная функция распределения турбулентных пульсаций – так называемая негауссовская статистика и перемежаемость» [4, с. 39]. «Пристеночная турбулентность плазмы в токамаке характеризуется такими свойствами, как перемежаемость, негауссова статистика, перенос типа супердиффузии с наличием всплесков амплитуды потоков. Плазма у стенки в токамаке является стохастической системой с динамикой типа Леви с пролетными траекториями» [4, с. 46]. «Фрактальный рост есть следствие сильной неравновесности в системе плазма – стенка и имеет универсальный характер. В токамаке сильная турбулентность пристеночной плазмы может возбуждать флуктуации в осаждаемом потоке, что приводит к фрактальному росту пленок с размерами от нано- до микрометров» [4, с. 34-35]. Для иллюстрации универсальности и значимости разрабатываемого авторами подхода к анализу стохастических и фрактальных структур на рис. 6 показаны поверхности углеводородной пленки токамака Т-10 в процессе экспериментальной эксплуатации [4].

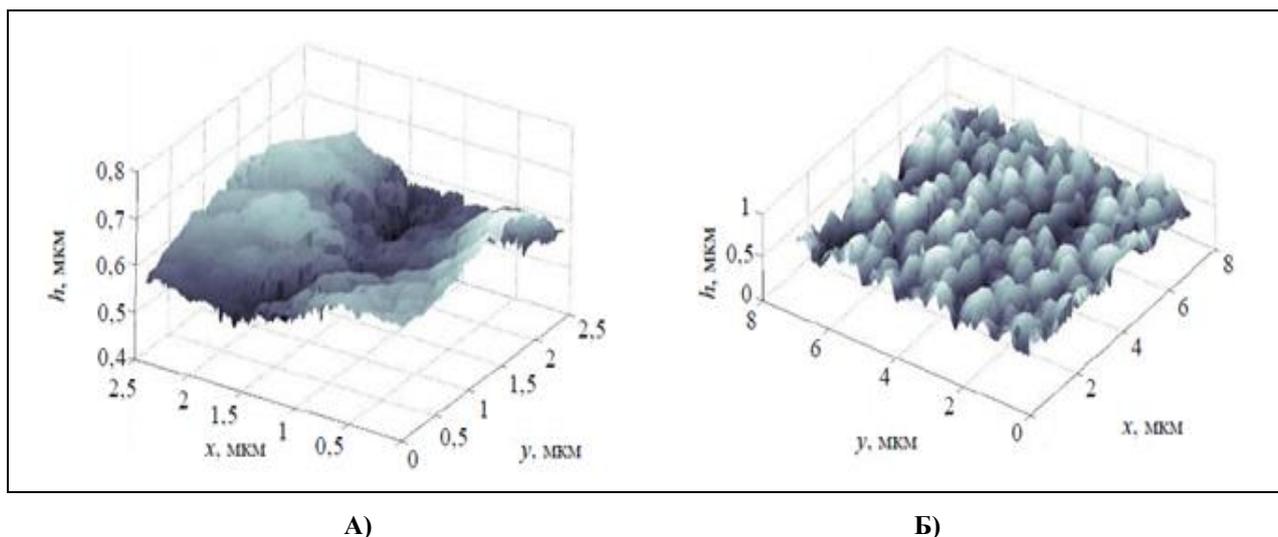


Рис. 6. 3D-структуры углеводородной пленки в установке токамака Т-10 [4]

Fig. 6. 3D structures of hydrocarbon film in the T-10 tokamak installation [4]

Изображение получено с помощью сканирующего туннельного микроскопа. Отмечается, что «форму и иерархическую структуру таких пленок можно классифицировать в рамках фрактальной геометрии, а стохастическая топография поверхности пленок характеризуется показателем Херста, равным 0,68-85, указывая на нетривиальное самоподобие структуры. Фрактальность (пористость) осажденных пленок следует рассматривать как важный вопрос накопления трития в термоядерном реакторе, в том числе, ИТЭР» [4, с. 37]. Таким образом, фрактальное распределение глубинных профилей мембран (пространственная стохастическая характеристика) имеет аналогию со стохастическим движением типа Леви потока частиц в турбулентных полях, определяющих фрактальные свойства микроструктур на этапе технологического синтеза или эксплуатации.

В предшествующей публикации авторов отмечается впервые полученный научный результат: «фрактальный анализ мембран позволяют ввести в рассмотрение для поверх-

ностей двумерную фрактальную размерность Хаусдорфа-Безиковича  $D = 3 - H$ , которая различается по направлениям  $X$  и  $Y$ . Фрактальная размерность по направлению  $X$  определяется как  $D_x = 3 - M\{H_x\}$ , где  $M\{H_x\}$  – среднее значение показателя Херста по 256 линиям сканирования глубинных профилей. Значение  $M\{H_x\} = 0.904$ ,  $D_x = 2.096$ . Аналогично вдоль оси  $Y$  мембраны компонента  $D_y = 3 - M\{H_y\} = 3 - 0.919 = 2.081$ » [16, с. 101-106]. Очевидно, что шероховатость поверхности углеводородной пленки, осажденной на конструкциях токамака Т-10 в процессе эксплуатации, также можно изучать на основе введенных двумерных фрактальных размерностей.

Отметим, что двумерная размерность  $D$ , в отличие от традиционного скалярного коэффициента, является вектором, компоненты которого имеют различные плотности распределения (рис. 5Б). Плотности распределения для  $H$  в первом приближении можно аппроксимировать линейными (одномодалными) плотностями и корректно ввести двумерную фрактальную размерность Хаусдорфа-Безиковича  $D_{x,y} = 3 - M\{H_{x,y}\}$ .

### Выводы

Исследование стохастических мембранных микроструктур должно опираться на:

- идентифицированную систему одномерных условных плотностей распределения и конструктивно определять систему двух случайных величин;
- обоснованный математический формализм и представление о двумерной фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича с двумя «ортогональными» компонентами.

### Библиографический список

1. Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. Ежегодник. Вып. 12. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2020. – 908 с.
2. **Потапов, А.А.** Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах / Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ. – М.: Техносфера, 2006. С. 374-479.
3. **Торохов, Н.А.** Фрактальная геометрия поверхностного потенциала электрохимически осажденных пленок платины и палладия / Н.А. Торохов, В.А. Новиков // Физика и техника полупроводника. 2009. Т. 43. Вып. 8. С. 1109-1115.
4. **Будаев, В.П.** Фрактальная нано- и микроструктура осаждённых пленок в термоядерных установках / В.П. Будаев, Л.Н. Химченко // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез, Вып. 3. 2008. С. 34-61.
5. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
6. **Куликов, В.Б.** Восстановление полимодальных плотностей вероятности по экспериментальным данным в структурах со стохастическими свойствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 1(1). С. 248-256.
7. **Kulikov, V.** The Stochastic and Singular Analysis of Fractal Signals in Cyber-Physical Systems of Biomedicine / V. Kulikov, A. Kulikov, A. Ignatyev // Society 5.0: Cyberspace for Advanced Human-Centered Society. Studies in Systems, Decision and Control. Cham: Springer, 2021. Vol. 333. p. 239-252.
8. **Vorotyntsev, V.M.** High purification of gases by diffusion through polymer membranes / V.M. Vorotyntsev // Petroleum Chemistry. 2015. Vol. 55. № 4. P. 259-275.
9. **Ямпольский, Ю.П.** Гибридные газоразделительные полимерные мембраны с добавками наночастиц / Ю.П. Ямпольский, Л.Э. Странникова, Н.А. Белов // Мембраны и мембранные технологии. 2014. Т. 4. № 4. С. 231-246.
10. **Kickelbick, G.** Concepts for the incorporation of inorganic building blocks into organic polymers on a nanoscale / G. Kickelbick // Progress in Polymer Science. 2003. Vol. 28. № 1. P. 83-114.
11. **Сазанова, Т.С.** Изучение гибридных полимерных мембран с помощью атомно-силовой микроскопии: топографический анализ поверхности и оценка распределения размеров пор / Т.С. Сазанова, И.В. Воротынцев, В.Б. Куликов, И.М. Давлетбаева, И.И. Зарипов // Мембраны и мембранные технологии. 2016. Т. 6 № 2. С. 166-175.

12. **Sazanova, T.S.** An Atomic Force Microscopy Study of Hybrid Polymeric Membranes: Surface Topographical Analysis and Estimation of Pore Size Distribution / T.S. Sazanova, I.V. Vorotyntsev, V.B. Kulikov, I.M. Davletbaeva, I.I. Zaripov // Petroleum Chemistry. 2016. Vol. 56. N. 5. P. 427-435. Pleiades Publishing, Ltd.
13. **Херст, Г.Э.** Долгосрочная вместимость водохранилищ // Труды Американского общества гражданских инженеров. 1951. Т. 116. С. 770-808.
14. **Петерс, Э.** Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Э. Петерс. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
15. **Федер, Е.** Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
16. **Куликов, В.Б.** Плотности распределения и фрактальная геометрия двумерных характеристик стохастических структур и систем / В.Б. Куликов, А.Б. Куликов, В.П. Хранилов, А.А. Игнатъев // Математические методы в технологиях и технике. 2024. № 6. С. 101-106.

*Дата поступления*

*в редакцию: 17.09.2024*

*Дата принятия*

*к публикации: 14.10.2024*